

# CONSTRUCCIÓN DE TEORÍAS LOCALES SOBRE LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VARIABLE: UN CASO DE ESTUDIO DE CLASES

Autor: Sergio Morales<sup>a</sup>, Raimundo Olfos<sup>b</sup>, y Soledad Estrella<sup>c</sup>

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Correos electrónicos: [Sergio.morales.candia@gmail.com](mailto:Sergio.morales.candia@gmail.com), [raimundo.olfos@pucv.cl](mailto:raimundo.olfos@pucv.cl), [soledad.estrella@gmail.com](mailto:soledad.estrella@gmail.com)

## Resumen

*Esta investigación se focaliza en un caso de estudio de clases que aborda la enseñanza del concepto de variable como número generalizado. El estudio busca identificar y describir los conocimientos y actividades de aprendizaje que desarrollan profesores durante el proceso de estudio de clases sobre el concepto de variable como número genérico, identificando la teoría de enseñanza local (TLE) que emerge en dicho proceso. Para recolectar datos se emplearon cuestionarios, entrevistas, y notas de campo de las sesiones de estudio de clases, dando como resultado una TLE que sustenta las actividades definidas por los docentes para que un alumno avance en la construcción de la variable como número genérico. La investigación da orientaciones sobre el potencial del Estudio de Clases para que los profesores desarrollen conocimientos y teorías para la enseñanza de la matemática.*

**Palabras clave:** estudio de clases, variable, algebra elemental, teoría local de enseñanza.

## INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas distintos investigadores han realizado estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental, evidenciando con ello que la matemática escolar es reducida frecuentemente a la simple aritmetización. En este sentido el álgebra escolar es interpretada como aritmética generalizada dado que involucra la formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas (Socas, 2011). Esta noción de álgebra como aritmética generalizada, promueve comprensiones erróneas y limitadas del uso de los símbolos algebraicos y genera obstáculos en la comprensión del concepto de variable. Kieran (1989) señala que al iniciar el estudio del álgebra, los alumnos ya cuentan con nociones y enfoques empleados en aritmética, que utilizan para generalizar la aritmética al álgebra. La autora agrega que el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética pues requiere de un cambio en el pensamiento del alumno desde las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones, y que por esto, extender las nociones y enfoques empleados en aritmética conlleva obstáculos en la comprensión del álgebra elemental.

Un ejemplo de ello fue extraído durante la observación de una clase. Aquí un profesor pregunta en voz alta al curso “¿puedo transformar 9 plumones a un término algebraico?” recibiendo como respuesta de un alumno “9p”. Tanto la pregunta como la respuesta evidencian una interpretación de la letra como etiqueta que está presente en el discurso en las aulas escolares, y que aleja al alumno del sentido algebraico del término “9p” entendido como la concatenación de “9xp” (Kieran, 1989) y del uso de “p” para representar una variable.

Anterior al trabajo de Kieran (1989), Küchemann (1981) había encontrado que la mayoría de los alumnos trataban las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas –número desconocido– más que como números generalizados o como variables. Este autor menciona en su estudio que el 55% de los niños de 13 años encuestados afirmaron que la igualdad  $L+M+N=L+P+N$

nunca es cierta. Booth (1982, 1983) encontró una fuerte resistencia de los alumnos para asimilar la noción de letra como número generalizado. Ya en 1983, Kieran evidenció que algunos alumnos no pueden asignar significado alguno a “a” en la expresión  $a+3$  porque la expresión carece de un signo igual y de un miembro de la derecha. Love (1986), mencionó que el álgebra tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son esencialmente algebraicos, como por ejemplo, manejar lo desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. El autor agrega que ser consciente de esos procesos, y controlarlos, es pensar algebraicamente.

A partir de los años noventa, el panorama de la investigación reflejaba una insatisfacción generalizada sobre las formas tradicionales de la enseñanza del álgebra, dadas las dificultades y errores que tenían los alumnos.

Kieran (2006) organiza en tres grandes núcleos los trabajos asociados a la enseñanza del álgebra realizados en las tres últimas décadas de investigación: transición de la aritmética al álgebra, uso de herramientas tecnológicas, y el pensamiento algebraico en los alumnos. Adicionalmente, Kieran (2007) aporta una revisión de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria, mostrando formas de construir significados para los símbolos algebraicos y su manipulación.

En otros estudios vinculados al uso y comprensión de la variable algebraica Martz (1982), Usinski (1988) y Trigueros (1999) señalan que a los alumnos les cuesta apropiarse de la esencia del concepto de variable, debido a que se utiliza en diferentes contextos con diferentes significados. Atendiendo a ello, dependiendo del contexto tratamos el concepto de variable de diferente manera. Como consecuencia de la variedad de significados asociados a este concepto, los alumnos manifiestan dificultades para pensar de manera flexible entre los distintos usos de la variable reportados por Ursini (1994) a los que se refirió como incógnita, número generalizado y relación funcional. En la misma línea, Ursini (2008) ofrece una propuesta de enseñanza del álgebra elemental y un breve análisis del álgebra impartida en secundaria, describiendo los distintos usos dados a las letras o variables en un contexto de álgebra elemental.

Los antecedentes anteriores no solo dan cuenta de las contribuciones de los investigadores en cuanto a la comprensión de problemáticas asociadas al aprendizaje del álgebra como lo es la comprensión del concepto de variable, si no también dan cuenta de la preocupación permanente por aportar con teorías de enseñanza y aprendizaje. A pesar de los estudios asociados al aprendizaje y la enseñanza del álgebra, Socas (2011) advierte que son muy pocos los países y profesores que interpretan y desarrollan propuestas curriculares que incorporan aspectos relevantes de los resultados de la investigación. Esto hace necesario poner atención a las dificultades que existen actualmente para que los profesores puedan aprender de los hallazgos de la investigación y puedan aplicarlos en la instrucción, pues los profesores carecen de tiempo para buscar resultados de las investigaciones e integrarlos a sus prácticas. Por tanto, es fundamental buscar alternativas que permitan a los profesores aprovechar los conocimientos contruidos por otros, o bien buscar espacios de colaboración para que los profesores, por si mismos, construyan conocimientos y teorías sobre la enseñanza de la matemática que den solución a las problemáticas de su propio contexto.

Este estudio se enfoca en la problemática de la enseñanza y aprendizaje del concepto de variable como número general (en adelante nos referiremos a él como variable) y busca evidenciar que los profesores a partir del Estudio de Clases son capaces de construir por sí mismos conocimientos y teorías acerca de la enseñanza y aprendizaje de la variable.

### **Estudio de clase**

Una alternativa eficaz y viable para que los profesores transformen sus prácticas y consigan aprendizajes efectivos en sus alumnos es el Estudio de Clases japonés. Autores como Stewart y Brendefur (2005) han indagado en sus potencialidades, llegando a afirmar que el Estudio de Clases

ofrece una oportunidad para generar auténticos logros de aprendizaje en los alumnos. Corcoran y Pepperell (2011) complementan la idea anterior reportando que el Estudio de Clases también fomenta el desarrollo colectivo del conocimiento matemático en los profesores. Los autores anteriores ponen de relieve la potencialidad del Estudio de Clases para abordar problemáticas como la propuesta en este estudio desde toda su complejidad, dado que además de permitir que los profesores construyan colectivamente conocimientos sobre un concepto matemático, su enseñanza y aprendizaje, también podría contribuir a una transformación de la enseñanza tradicional de la matemática generando así verdaderas oportunidades de aprendizaje en los alumnos.

### Teoría de instrucción local

El Estudio de Clases consiste en una actividad científica que desarrollan profesores, al interior de una escuela, buscando construir sus propias teorías para desarrollar y compartir buenas prácticas (Isoda, 2012). Esta definición hace referencia al uso del Estudio de Clases en el desarrollo de teorías para construir buenas prácticas. En esta investigación utilizaremos el concepto de “Teoría de Enseñanza Local” (TLE), el cual varios autores han definido como un marco de referencia que dirige la toma de decisiones de un profesor respecto de la selección y diseño de actividades de enseñanza, es decir, las TLE no se refieren a las actividades de enseñanza que funcionan, sino a una descripción de cómo funcionan dichas actividades (Cobb et al., 2003; Edelson, 2002; Gravemeijer & Cobb, 2006). Para Gravemeijer (1998) las TLE<sup>18</sup> son producto de la investigación del diseño de secuencias de enseñanza desarrolladas en un proceso iterativo de constante experimentación y revisión, es por eso que resulta posible establecer una relación directa entre una TLE y el Estudio de Clases, ya que este último es una actividad científica que permite construir lecciones de enseñanza por medio de un proceso cíclico basado en la experimentación y revisión continua de una clase. En este sentido el Estudio de Clases puede constituirse en un medio para que los profesores construyan, desde la escuela, TLE que sustenten el diseño de lecciones prototípicas para enseñar por ejemplo, el concepto de variable.

La Figura 1 describe el proceso con el cual un grupo de profesores que implementa un Estudio de Clases construye una TLE respecto de la enseñanza:

En la Figura 1, se observa como el plan de clases inicial (P1), es mejorado consecutivamente (P2, P3 y P4) en función de la implementación sucesiva de las clases C1, C2 y C3. Cada Plan de Clases es sustentado por las ideas de enseñanza de los profesores que lo diseñaron, las que son validadas a partir de su respectiva implementación. Estas ideas constituyen marcos de referencia que guían la toma de decisiones de los profesores respecto del diseño y organización de una lección plasmada en el plan, los cuales pueden ser entendidos como el núcleo de una TLE, que a medida que se pule durante el proceso de Estudio de Clases permite ir construyendo –robusteciendo– una TLE respecto del diseño de una clase prototípica que cumpla con cierto objetivo.

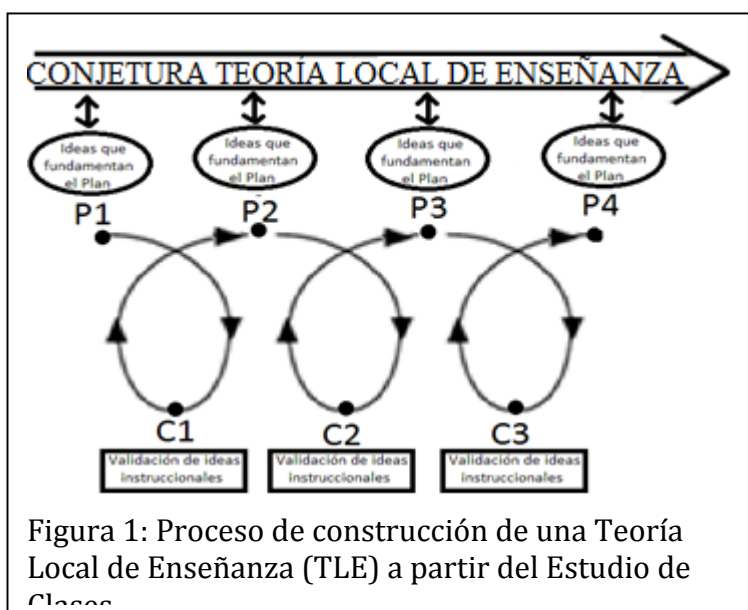


Figura 1: Proceso de construcción de una Teoría Local de Enseñanza (TLE) a partir del Estudio de Clases

<sup>18</sup>Gravemeijer se refiere a las TEL como “Local Instruction Theory”.

Cada implementación valida las ideas instruccionales que sustentan el plan de clases. La insatisfacción de los profesores respecto del cumplimiento del objetivo propuesto lleva a invalidar algunas de las ideas de enseñanza que fundamentaban el plan, esto implica un análisis de parte de los profesores con el objetivo de comprender las razones por las cuales la clase no funcionó como estaba prevista, llevando a modificar el plan. Como resultado del proceso, las ideas de enseñanza que fundamentaban el éxito del plan cambian, ya sea porque son mejoradas o porque son sustituidas por otras. En cambio, cuando el objetivo de la clase satisface las expectativas de los profesores, el proceso se estabiliza. Lo cual indica que las ideas de enseñanza que fundamentan el plan han orientado adecuadamente la toma de decisiones de un grupo de profesores para construir una clase efectiva. En este nivel, las ideas de enseñanza o más bien el marco que sustenta la propuesta corresponde a una TLE, respecto del cumplimiento de un cierto objetivo, que ha sido construida y validada a partir de la investigación y práctica al interior de una escuela.

## **Metodología**

El presente estudio centra su interés en analizar cómo algunos profesores de Chile podrían llegar a construir conocimientos y teorías para la enseñanza del álgebra elemental desde la escuela. Los antecedentes evidencian que las investigaciones y actividades de enseñanza propuestas por investigadores para abordar la aritmetización del álgebra escolar parecen no tener mayor influencia en la escuela. Es por ello que con el fin de determinar un medio para que los profesores, por sí mismos, construyan conocimientos y teorías sobre la enseñanza fue seleccionado un grupo de profesores que implementa Estudio de Clases, dentro de su escuela, con el objetivo de interpretar y describir la TLE del concepto de variableizado que construyen los profesores durante el proceso.

Para llevar a cabo este estudio nuestro trabajo se basó principalmente en la observación y la toma de registro, esto permitió mirar e inspeccionar rigurosamente el proceso de estudio de clases para así identificar los conocimientos que construyen los profesores durante este proceso.

La investigación es de carácter cualitativa, y el caso en estudio corresponde a un Estudio de Clases que experimenta un grupo de profesores sobre el concepto de variable.

Dadas las características del grupo, la actividad científica que desarrollan, y la accesibilidad del investigador a la institución y al GEC-INSUCO es que este grupo es considerado ideal para llevar a cabo el estudio. El GEC-INSUCO está compuesto por 8 profesores de matemática, 5 mujeres y 3 hombres, cuya experiencia como profesor de aula varía entre 1 y 41 años, de los cuales serán estudiados solo dos profesores, con 1 y 13 años de experiencia como profesor respectivamente. Las sesiones fueron semanales, con una duración aproximada de 60 minutos.

El proceso de estudio de clases se extendió por 13 sesiones. Se obtuvo dos versiones del plan de clase (una inicial y una final) que se implementaron en dos cursos diferentes, con una semana de diferencia entre cada implementación.

Las clases fueron implementadas por los mismos profesores, y observadas por 7 de los 8 profesores que participaron en la planificación uno de ellos se encargó de filmarlas y el resto asumió tareas como contrastar la implementación con el plan de clase, indagar en las producciones de los alumnos en búsqueda de dificultades, errores no previstos en el plan, entre otros.

Para recoger datos se aplicó un cuestionario, una entrevista, y se recogió los Planes de Clases. El cuestionario y la entrevista fueron elaborados con las mismas preguntas de base y aplicados a cada profesor con dos semanas de diferencia con el objetivo de validar la estabilidad del discurso de los informantes. Cada instrumento buscaba por un lado identificar aquellos conocimientos asociados a las actividades o tareas claves que debían experimentar los alumnos durante la clase, y por otro, identificar las justificaciones o fundamentos que dan los profesores a dichas actividades o tareas. A partir de lo anterior el investigador conjeturó la TLE acerca de la variable construida por los profesores, para dar fundamento a las actividades o tareas claves de la clase diseñada.

Para analizar el cuestionario, el texto fue dividido en unidades de análisis compuestas por ideas centrales identificadas por el investigador, con ellas fue construido un discurso descriptivo respecto las actividades o tareas consideradas por los profesores como claves para una clase sobre la variable, y teorías personales acerca de la enseñanza de la variable.

A partir del Plan de Clases fueron identificadas las principales actividades o tareas que experimentaban los alumnos en la clase que los llevan a comprender el concepto de variable, así como el orden en el que debían ser planteadas; lo cual fue complementado con los datos recogidos previamente en el cuestionario. El producto resultante corresponde a una conjetura sobre la trayectoria de aprendizaje sobre el concepto de variable, que según los profesores, debían seguir los alumnos para comprender dicho concepto. Esta trayectoria compuesta por actividades y tareas consideradas como claves por los profesores, sería utilizada posteriormente en la entrevista, para identificar las teorías personales de enseñanza, de los profesores, sobre el concepto de variable.

La entrevista realizada dos semanas después de aplicado el cuestionario permitió por un lado identificar nuevamente las teorías personales de enseñanza del concepto de variable, las cuales fueron utilizadas para complementar y validar las TPE de la variable identificadas a partir del cuestionario, y por otro, permitió identificar y describir la TLE sobre la variable construida por los profesores durante el proceso de estudio de clases.

La validación de las teorías personales de enseñanza sobre el concepto de variable se realizó mediante cuadros comparativos que ayudaron a analizar la estabilidad del discurso de los profesores entre el cuestionario y la entrevista. La estabilidad en el discurso de cada informante dio viabilidad a la teoría personal de enseñanza y contribuyó a su robustecimiento. Finalmente, las teorías personales de enseñanza complementadas, dieron origen a la TLE sobre el concepto de variable construida por los profesores durante el proceso de estudio de clases.

### CONCLUSIONES

Se observó que, en el transcurso de 14 días, las teorías personales de enseñanza de cada integrante, sobre el sentido y los fundamentos de las actividades y tareas claves de la clase eran estables en un 100%, esto evidencia una construcción de conocimientos tanto en P1 como en P2.

El cuadro siguiente compara los fundamentos que dan P1 y P2 respecto de una de las actividades consideradas como claves para la clase:

Actividad f de la trayectoria de aprendizaje diseñada por el grupo de profesores		
<div> <p>¿Qué relación existe entre los triángulos?</p> </div> <p>¿Cuál es el triángulo de lugar 65?</p>		
Informante 1	Informante 2	Componentes invariantes
Esta actividad aumenta el nivel de dificultad, dado que el alumno debe buscar un triángulo que está más lejos. Fue pensada para que algunas de las estrategias empleadas en casos anteriores no fueran prácticas de usar, y así estimular a los alumnos para que establezcan relaciones entre los vértices de cada triángulo, lo	La actividad aumenta la complejidad, preguntando por un triángulo que está más alejado para evitar que construya uno a uno para dar con la respuesta. Lo anterior busca focalizar la atención del alumno en las relaciones entre los	<p>1) Aumenta el nivel dificultad al preguntar por un triángulo que está más alejado. <i>[hay fluctuaciones en el nivel de dificultad]</i></p> <p>2) Busca evitar el uso de estrategias que no son prácticas para este caso, como por ejemplo, aquella que implica construir uno</p>

cual le permitirá responder más rápido.	vértices de cada triángulo.	a uno para dar la respuesta. 3) El foco de la actividad está en estimular al alumno para focalizar su mirada en las relaciones que hay entre los vértices de cada triángulo.
---	-----------------------------	---

En el recuadro se observan coincidencias en los fundamentos de P1 y P2 declarados para la actividad “F”, evidenciando así una construcción colectiva de conocimientos teóricos comunes, entre los integrantes del Grupo de Estudio de Clases, en este caso acerca de los fundamentos y del sentido de la actividad “F”; las coincidencias en el discurso de P1 y P2 también se observan al comparar los fundamentos que dan del resto de actividades y tareas claves que componen la clase.

Estos hallazgos dan evidencia de la capacidad de los profesores para diseñar propuestas de clases con fundamentos, construidos mediante la investigación en el proceso de Estudio de Clases, y que apuntan a la solución de problemáticas de enseñanza y aprendizaje complejas, como lo es el del concepto de variable. Problemáticas escolares que muchas veces no son resueltas por las investigaciones científicas tradicionales.

En resumen, se observó que en el transcurso de 14 días las teorías de enseñanza personales de cada integrante, que se refieren al sentido y los fundamentos de las actividades y tareas de la clase, eran estables en un 100% esto evidencia una construcción de conocimientos tanto en P1 como en P2. También, se observó que las teorías personales de enseñanza construidas por cada profesor en el marco del Estudio de Clases, eran comunes entre sí, en un 100%. Lo cual sienta las bases para el desarrollo de esta teoría dentro de la misma institución escolar que le dio vida. Estableciendo una posible línea de fortalecimiento profesional que apunte al desarrollo de conocimientos y habilidades para abordar problemas complejos de la enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental.

Agradecimientos a FONDECYT<sup>o</sup> 11140472

## Referencias

- Booth, L. (1982). *Developing a teaching module in beginning algebra. Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of mathematics Education. Antwerp.*
- Booth, L. (1983). *A diagnostic teaching programme in elementary algebra: Results and implications. En Hershkowitz, (eds.), 307-312.*
- Cobb, P., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2003). *Learning about statistical covariation. Cognition and Instruction, 21(1), 1–78.*
- Corcoran, D., & Pepperell, S. (2011). *Learning to Teach Mathematics Using Lesson Study. In Rowland, T & Ruthven, K., (Eds.), Mathematical Knowledge in Teaching, New York: Springer.*
- Edelson, D. C. (2002). *Design research: What we learn when we engage in design. Journal of the Learning Sciences, 11, 105–121.*
- Gravemeijer, K. (1998). *Developmental research as a research method. En J. Kilpatrick & A. Sierpiska (Eds.), Mathematics education as a research domain: A search for identity, 277–295. Dordrecht: Kluwer Academic.*
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). *Design research from the learning design perspective. En J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Eds.), Educational design research, 17–51. London: Routledge.*

- Kieran, C. (1983). *Relationships between novices's views of algebraic letters and their use of symmetric and asymmetric equation-solving procedures*. En Bergeron y Herscovics, (eds.), *Proceedings of the 5 th Annual Meeting of PME-NA*, 161-168, Montreal, Canada: Université de Montréal.
- Kieran, C. (1989). *The early learning of algebra: A structural perspective*. En S. Wagner y C. Kieran. *Research agenda for mathematics education: Vol. 4. Research issues in the learning and teaching of algebra*, 33-56. Hillsdale: Erlbaum.
- Kieran, C. (2006). *Research on the learning and teaching of algebra*. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 11-50. Rotterdam: Sense.
- Kieran, C. (2007). *Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels*. En Lester, F. K. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 707-762. Reston: NCTM e IAP.
- Kuchemann, D. (1981). *Algebra Un Hart*. En M.B.K, *Children's understanding of mathematics*, 102-119. London: John Murray.
- Lewis, C., & Tsuchida, I. (1997). *Planned educational change in Japan: The case of elementary science instruction*. *Journal of Educational Policy*, 12, 313-331.
- Love, E. (1986). *What is algebra?*. *Mathematics Teaching*, 117, 48-50.
- Martz, M. (1982). *Towards a process model for high school algebra errors*. En D. Sleeman & J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems*, 25-50. New York: Academic Press.
- Socas, M. (2011). *La enseñanza del algebra en la educación obligatoria*. *Números*, 77, 5-34.
- Stewart, R. A., & Brendefur, J. L. (2005). *Fusing lesson study and authentic achievement: A model for teacher collaboration*. *Phi Delta Kappan*, 86(9), 681-687.
- Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). *La Conceptualización de la Variable en la Enseñanza Media*. *Educación Matemática*, 27-48.
- Ursini, S. (1994). *Pupils' Approaches to Different Characterizations of Variable in LOGO*. PhD Thesis. University of London Institute of Education.
- Usinski, Z. (1988). *Conceptions of School Algebra and Uses of Variables*. *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. Virginia: The Council.